ΛΥΣΗ

α)

i. Επειδή η Αx είναι η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\widehat{Α}_{εξ}$ του τριγώνου θα ισχύει ότι $x\widehat{A}y = x\widehat{A}B$ και αφού $\widehat{Α}_{εξ} = 120^o$, τότε $x\widehat{A}y = x\widehat{A}B = \frac{\widehat{Α}_{εξ}}{2} = 60^o$ (1).

   Όμως είναι $x\widehat{A}B = Δ\widehat{B}A$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αx και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε λόγω της σχέσης (1) προκύπτει ότι $Δ\widehat{B}A = 60^0$.

ii. Είναι $B\widehat{Δ}A = x\widehat{A}y$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αx και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε λόγω της σχέσης (1) προκύπτει ότι $B\widehat{Δ}A = 60^0$.

   Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΔ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60^o, τις $Δ\widehat{B}A$ και $B\widehat{Δ}A$ και γνωρίζοντας ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με 180^0, προκύπτει ότι και η τρίτη του γωνία, η $B\widehat{A}Δ$, θα είναι ίση με 60^o, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

β) Είναι $B\widehat{Δ}A = 60^0$ και $B\widehat{Δ}A = 2\,\widehat{Γ}$ από την υπόθεση, άρα $\widehat{Γ} = 30^o$.

Επίσης είναι $B\widehat{Δ}Γ = 180^o - B\widehat{Δ}A = 180^o - 60^o = 120^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ, έχουμε:

$$Δ\widehat{B}Γ + \widehat{Γ} + B\widehat{Δ}Γ = 180^o \text{ ή } Δ\widehat{B}Γ + 30^o + 120^o = 180^o \text{ ή } Δ\widehat{B}Γ + 150^o = 180^o \text{ ή } Δ\widehat{B}Γ = 30^o$$