ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2\beta x + \beta^2 - 4$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = (-2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16 > 0.$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$x_{1,2} = \frac{2\beta \pm 4}{2}$, οπότε έχουμε: $x_1 = \beta + 2, x_2 = \beta - 2.$

Μία εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1 = \beta + 2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta + 2)^2 - 2\beta(\beta + 2) + \beta^2 - 4 = \beta^2 + 4\beta + 4 - 2\beta^2 - 4\beta + \beta^2 - 4 = 0.$$

Ομοίως η $x_2 = \beta - 2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta - 2)^2 - 2\beta(\beta - 2) + \beta^2 - 4 = \beta^2 - 4\beta + 4 - 2\beta^2 + 4\beta + \beta^2 - 4 = 0.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις x_1, x_2, με $x_1 \neq x_2$.

β) Οι αριθμοί $\beta - 2, \beta, \beta + 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι ισχύουν:

$\beta - (\beta - 2) = 2$ και

$(\beta + 2) - \beta = 2$, δηλαδή διαφέρουν κατά σταθερό αριθμό $\omega = 2$.