ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για την συνάρτηση $g(x) = xf^2(x)$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αφού γεωμετρικά το συμπέρασμα του θεωρήματος εξασφαλίζει ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης με οριζόντια εφαπτομένη.

Πράγματι, η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, ως γινόμενο παραγωγίσμων συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$, ενώ από τα δεδομένα προκύπτει ότι

$g(a) = af^2(a) = \beta f^2(\beta) = g(\beta)$.

β) Αφού $f^2(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση $f^2(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, το ζητούμενο εμβαδό θα είναι:

$$E = \int_\alpha^\beta f^2(x)dx = \int_\alpha^\beta x' \cdot f^2(x)dx = [xf^2(x)]_a^\beta - \int_\alpha^\beta x\left(f^2(x)\right)' dx =$$

$\left(\beta f^2(\beta) - \alpha f^2(\alpha)\right) - 2\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx = 0 - 2(-ln2) = ln4$ τετραγωνικές μονάδες.

γ) Αφού η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

Αν ήταν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ήταν και $xf(x)f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα και $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx > 0$, δηλαδή $-ln2 > 0$, άτοπο.

Ώστε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

δ) Η συνάρτηση G είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$, αφού έχουμε $G'(x) = f(x)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Σύμφωνα με σχόλιο του βιβλίου, η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της G σε κάθε σημείο, βρίσκεται «πάνω» από την γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Αφού η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της G στο σημείο $(\alpha, G(a))$ έχει εξίσωση $y = G(a) + G'(a)(x - a)$, άρα για κάθε $x \in (a, \beta]$ θα ισχύει:

$G(x) < G(a) + G'(a)(x - a)$, άρα $\frac{G(x)-G(a)}{x-a} < f(a)$, καθώς $G'(a) = f(a)$ και $x - a > 0$.

<u>Σημείωση</u>: Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ στο διάστημα $[1, 4]$.