ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για την συνάρτηση ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα , αφού γεωμετρικά το συμπέρασμα του θεωρήματος εξασφαλίζει ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης με οριζόντια εφαπτομένη.

Πράγματι, η είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, ως γινόμενο παραγωγίσμων συναρτήσεων στο , ενώ από τα δεδομένα προκύπτει ότι

.

β) Αφού για κάθε και η συνάρτηση είναι συνεχής στο , το ζητούμενο εμβαδό θα είναι:

τετραγωνικές μονάδες.

γ) Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο με για κάθε , τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο .

Αν ήταν για κάθε , τότε θα ήταν και για κάθε , άρα και , δηλαδή , άτοπο.

Ώστε για κάθε , άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο .

δ) Η συνάρτηση είναι κοίλη στο , αφού έχουμε και η είναι γνησίως φθίνουσα στο .

Σύμφωνα με σχόλιο του βιβλίου, η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της σε κάθε σημείο, βρίσκεται «πάνω» από την γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Αφού η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της στο σημείο έχει εξίσωση , άρα για κάθε θα ισχύει:

, άρα , καθώς και .

Σημείωση: Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η στο διάστημα .