

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)f'(x)dx = -\ln 2$.
- $\beta f^2(\beta) = \alpha f^2(\alpha)$.
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$g(x) = xf^2(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$ και τον άξονα $x'x$, είναι $\ln 4$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (a, \beta]$ ισχύει $\frac{G(x)-G(a)}{x-a} < f(a)$.

(Μονάδες 7)