ΛΥΣΗ

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Από την εκφώνηση, έχουμε ότι $\lambda = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}$, οπότε $f(\beta) - f(a) = \lambda(\beta - \alpha)$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, άρα και συνεχής, ενώ

$g(a) = \frac{f(a)+\lambda a-f(a)}{a} = \frac{\lambda a}{a} = \lambda$ και $g(\beta) = \frac{f(\beta)+\lambda a-f(a)}{\beta} = \frac{\lambda a+\lambda(\beta-\alpha)}{\beta} = \frac{\lambda\beta}{\beta} = \lambda$.

Δηλαδή $g(a) = g(\beta)$.

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι υπάρχει $c \in (a, \beta)$ ώστε $g'(c) = 0$.

Παρατηρούμε ότι $g'(x) = \frac{[f(x)+\lambda a-f(a)]'\cdot x-\left(f(x)+\lambda a-f(a)\right)\cdot x\prime}{x^2} = \frac{xf'(x)-f(x)-\lambda a+f(a)}{x^2}$.

Επομένως, $g'(c) = 0 \Rightarrow cf'(c) - f(c) - \lambda a + f(a) = 0$. (1)

γ) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη ευθεία (ε) της γραφικής παράστασης της f στο M έχει εξίσωση $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ δηλαδή $y = f'(c)x + (f(c) - cf'(c))$.

Η ευθεία AB έχει εξίσωση $y - f(a) = \lambda(x - a)$ δηλαδή $y = \lambda x + (f(a) - \lambda a)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο τομής αυτών των δύο ευθειών (ε) και AB βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

Για να βρούμε την τετμημένη του σημείου τομής των δύο ευθειών, λύνουμε την εξίσωση $f'(c)x + \left(f(c) - cf'(c)\right) = \lambda x + (f(a) - \lambda a)$, άρα

$(f'(c) - \lambda)x = cf'(c) - f(c) + f(a) - \lambda a = 0$, λόγω της σχέσης (1).

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $f'(c) \neq \lambda$.

Αν είναι $f'(c) = \lambda$ τότε η σχέση (1) γίνεται $\lambda = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$, που σημαίνει ότι η ευθεία AM είναι παράλληλη προς την AB, κάτι που θα σήμαινε ότι το M θα ανήκει στην ευθεία AB. Αντίφαση.

Ώστε $x = 0$, άρα το σημείο τομής των ευθειών (ε) και AB έχει τετμημένη μηδέν και επομένως βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

δ) Θέτουμε $u = x^2 + 1$, οπότε $du = 2xdx$, άρα $\frac{1}{2}du = xdx$.

Για $x = \sqrt{a-1}$, παίρνουμε $u = \left(\sqrt{a-1}\right)^2 + 1 = a$ και ανάλογα

για $x = \sqrt{\beta - 1}$, παίρνουμε $u = \left(\sqrt{\beta-1}\right)^2 + 1 = \beta$.

Ώστε $I = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{f'(u)}{f(u)}du = \frac{1}{2}\cdot[\ln(f(u)]_a^\beta = \frac{1}{2}\{\ln(f(\beta)) - ln f(a))\} = \frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{f(\beta)}{f(a)}\right) =$

$\frac{1}{2}\cdot ln(e^2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$.

Σημείωση: Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $f(x) = e^{-x}$ στο διάστημα $[2, 4]$.