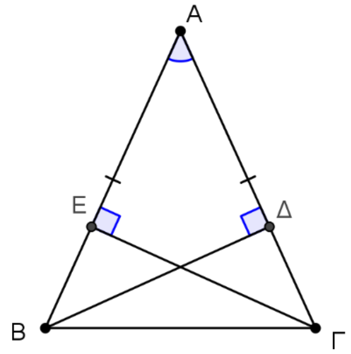
ΛΥΣΗ

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.

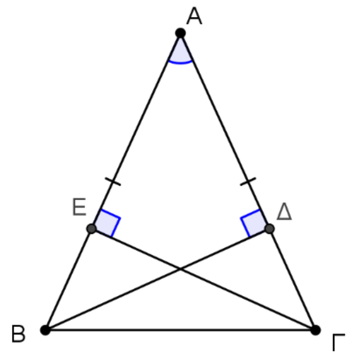


Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $Α\widehat{Δ}Β = Α\widehat{Ε}Γ = 90^0$, γιατί ΒΔ και ΓΕ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ από υπόθεση.
- ΑΒ=ΑΓ, ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
- $\widehat{Α}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΓΕΑ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Οπότε θα έχουν και τις πλευρές ΒΔ και ΕΓ ίσες, ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους γωνία $\widehat{Α}$.

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη του στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα τα οποία είναι ίσα.



Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

- $Β\widehat{Ε}Γ = Β\widehat{Δ}Γ = 90^0$, γιατί ΓΕ και ΒΔ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ από υπόθεση.
- ΒΓ κοινή πλευρά
- ΒΔ = ΓΕ ως δεδομένο

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Οπότε, έχουν και $\widehat{Γ} = \widehat{Β}$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών ΒΔ και ΓΕ, αντίστοιχα. Οπότε, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, τις $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$, άρα είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.