ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και $D_g = \mathbb{R}$ οπότε:

$$A_1 = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e^x} \neq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} : e^x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}^*,$$

είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.

ii. Λόγω του ερωτήματος (α, i) το $A_1 \neq \varnothing$, οπότε ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ με

τύπο $h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \dfrac{1}{g(x)-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}-1} = \dfrac{e^x}{1-e^x},\ x \neq 0.$

β) Για $x_{1,}\ x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \dfrac{e^{x_1}}{1-e^{x_1}} = \dfrac{e^{x_2}}{1-e^{x_2}} \Rightarrow$

$e^{x_1} \cdot (1-e^{x_2}) = e^{x_2} \cdot (1-e^{x_1}) \Rightarrow e^{x_1} - e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_2} - e^{x_1} \cdot e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$,

επομένως η συνάρτηση h είναι ‘1-1’.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1-e^x} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{dL'H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{(1-e^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{-e^x} = -1$.

Εναλλακτικά: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1-e^x} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x(\frac{1}{e^x}-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1$.