

ΛΥΣΗ

α) Στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ τα τμήματα ΜΕ και ΑΓ είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι $ΜΔ = ΔΕ$ (υπόθεση) και $ΑΔ = ΔΓ$, αφού ΜΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΜΓ, έχουμε ότι οι διαγώνιοι ΜΕ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ διχοτομούνται στο Δ. Οπότε το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ.

Επειδή ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, θα είναι και ύψος του τριγώνου οπότε το ΑΜ είναι κάθετο στη ΒΓ(1), οπότε $\widehat{ΑΜΓ} = 90^\circ$.

Οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΜΓΕ έχει μια γωνία του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Αφού είναι ΔΖ κάθετο στην ΑΜ και από (1) είναι ΒΓ κάθετο στην ΑΜ, οπότε και ΜΓ είναι κάθετο στην ΑΜ, άρα $ΔΖ // ΜΓ$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και $ΔΖ // ΜΓ$, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΜ. Οπότε το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΜ και ΑΓ του τριγώνου ΑΜΓ άρα θα είναι ίσο με το μισό της πλευράς του ΜΓ, δηλαδή $ΔΖ = \frac{ΜΓ}{2}$.

Επειδή $ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, αφού Μ μέσο ΒΓ, τότε θα είναι $ΔΖ = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2}$, οπότε $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}$.

