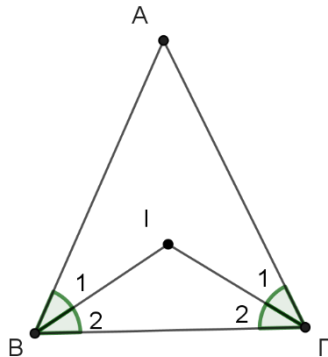


ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του B και Γ .



α) Αφού είναι BI διχοτόμος της γωνίας \widehat{B} και GI διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ τότε θα είναι

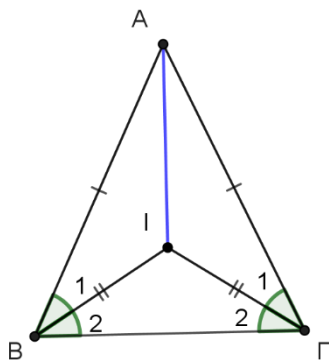
$$\widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2} \quad (1) \quad \text{και} \quad \widehat{\Gamma}_2 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} \quad (2), \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$ οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (3)

$$\text{Λόγω των σχέσεων (1), (2) και (3) θα είναι: } \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_2$$

Άρα, το τρίγωνο BIG έχει δύο προσκείμενες στην πλευρά του $B\Gamma$ γωνίες ίσες, τις \widehat{B}_2 και $\widehat{\Gamma}_2$, οπότε θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά του $B\Gamma$.

β) Φέρνουμε το τμήμα AI .

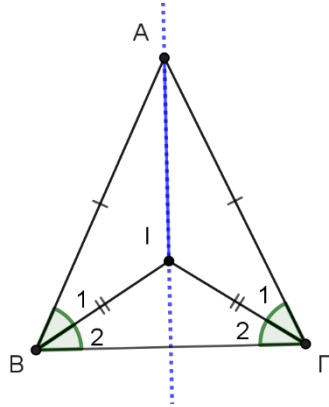


Τα τρίγωνα AIB και AIG έχουν:

- $AB = A\Gamma$ ως πλευρές του ισοσκελούς $AB\Gamma$ της υπόθεσης.
- $BI = IG$, ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου BIG του α) ερωτήματος.
- $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ αφού BI και GI είναι διχοτόμοι των ίσων γωνιών της βάσης $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου BIG του α) ερωτήματος.

Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), οπότε έχουν και $\widehat{ΑΙΒ} = \widehat{ΑΙΓ}$ ως γωνίες απέναντι από ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

γ)



Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ από υπόθεση και $ΒΙ = ΙΓ$ από α) ερώτημα, τα σημεία Ι και Α ισαπέχουν από τα Β και Γ άρα είναι σημεία της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ.

Άρα η ΑΙ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.