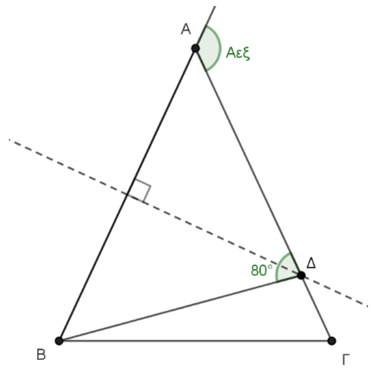
ΛΥΣΗ

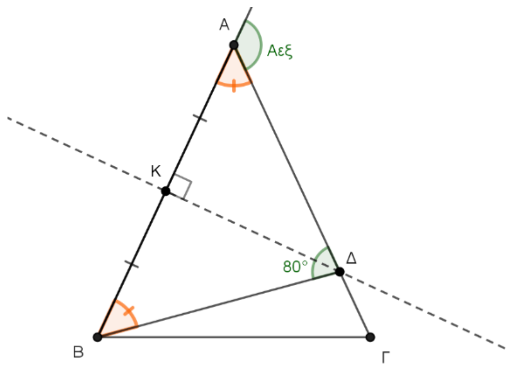
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η $\widehat{A}_{εξ}$ θα είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\widehat{A}_{εξ}$ = Α$\widehat{Β}$Γ + $\widehat{Γ}$.

Όμως από υπόθεση έχουμε ότι η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας Α$\widehat{Β}$Γ, δηλαδή $\widehat{A}_{εξ}$ = 2Α$\widehat{Β}$Γ, τότε 2Α$\widehat{Β}$Γ = Α$\widehat{Β}$Γ + $\widehat{Γ}$, οπότε Α$\widehat{Β}$Γ = $\widehat{Γ}$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις προσκείμενες στην πλευρά του ΒΓ γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε ΑΒ = ΑΓ.



β) Έστω Κ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ.



Επειδή στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΚ είναι μεσοκάθετος στην πλευρά του ΑΒ, τότε θα είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Άρα θα έχει ίσες και τις προσκείμενες στη βάση του ΑΒ γωνίες, δηλαδή $\widehat{A}$ = Α$\widehat{Β}$Δ.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΒ ισχύει ότι Α$\widehat{Δ}$Β + $\widehat{A}$ + Α$\widehat{Β}$Δ =180°

Αφού είναι Α$\widehat{Δ}$Β =80^0 και $\widehat{A}$ = Α$\widehat{Β}$Δ, τότε έχουμε: 80° + 2$\widehat{A}$ =180° ή 2$\widehat{A}$ = 100°, άρα $\widehat{A}$ = 50°.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{A}$ + $\widehat{B}$ + $\widehat{Γ}$ = 180°

Αφού είναι $\widehat{A}$ = 50° και $\widehat{B}$ = $\widehat{Γ}$, τότε έχουμε: 50° + 2$\widehat{B}$ = 180° ή 2$\widehat{B}$ = 130°, άρα $\widehat{B}$ = 65°.