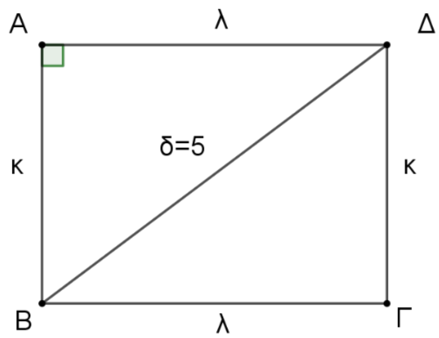
ΛΥΣΗ

α)



i. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\kappa + 2\lambda$, οπότε:

$$2\kappa + 2\lambda = 14 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 7.$$

Επίσης, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ βρίσκουμε ότι

$$\kappa^2 + \lambda^2 = \delta^2 \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 = 25.$$

Από την ταυτότητα $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, έχουμε ότι:

$$7^2 = 25 + 2\kappa\lambda \Leftrightarrow$$

$$2\kappa\lambda = 49 - 25 \Leftrightarrow$$

$$\kappa\lambda = 12.$$

Άρα, το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \kappa\lambda = 12\ cm$.

ii. Δύο αριθμοί είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$ αν και μόνο αν έχουν άθροισμα $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{(-7)}{1} = 7$ και γινόμενο $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{12}{1} = 12$. Από το ερώτημα αi) προκύπτει ότι οι διαστάσεις κ και λ ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές, οπότε είναι ρίζες της εξίσωσης.

iii. Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{7+1}{2} = 4 \\ \dfrac{7-1}{2} = 3 \end{cases}.$$

Άρα, οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $3\ cm$ και $4cm$.

β) Όπως και στο ερώτημα α), οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου με περίμετρο $\Pi = 14$ και εμβαδόν E έχουν άθροισμα $S = 7$ και γινόμενο $P = E$. Άρα, είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 7x + E = 0.$$

Η εξίσωση έχει λύσεις, δηλαδή υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο, αν και μόνο αν για τη διακρίνουσα ισχύει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot E \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 49 - 4E \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E \leq \frac{49}{4}.$$