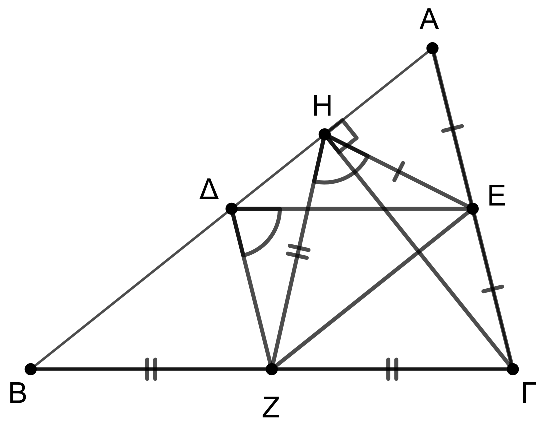
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ και σημειώνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Φέρουμε την προβολή Η της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ, οπότε $\Gamma H \perp AB$.



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΓ με $\Gamma\hat{H}A = 90^o$, η ΗΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΓ, οπότε $HE = E\Gamma = EA = \frac{A\Gamma}{2}$, άρα $HE = E\Gamma$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ με $\Gamma\hat{H}B = 90^o$, η ΗΖ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $HZ = Z\Gamma = ZB = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $HZ = Z\Gamma$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα σημεία Δ και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Επομένως, ΔΖ//ΑΓ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = E\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔΖ και ΕΓ ίσες και παράλληλες,

γ) Αφού το ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες του θα είναι ίσες, οπότε και $Z\hat{\Delta}E = E\hat{\Gamma}Z$ (1).

Αφού είναι $HE = E\Gamma$ (από α) ερώτημα), τότε το τρίγωνο ΗΕΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}E$ (2), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΗΕ αντίστοιχα.

Επίσης, είναι $HZ = Z\Gamma$ (από α) ερώτημα), άρα το τρίγωνο ΗΖΓ είναι ισοσκελές, οπότε $Z\hat{H}\Gamma = H\hat{\Gamma}Z$ (3), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΖΓ και ΖΗ αντίστοιχα.

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε: $Z\hat{H}\Gamma + \Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}Z + H\hat{\Gamma}E$ και άρα $Z\hat{H}E = E\hat{\Gamma}Z$ και επειδή από σχέση (1) είναι $Z\hat{\Delta}E = E\hat{\Gamma}Z$, προκύπτει ότι $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.