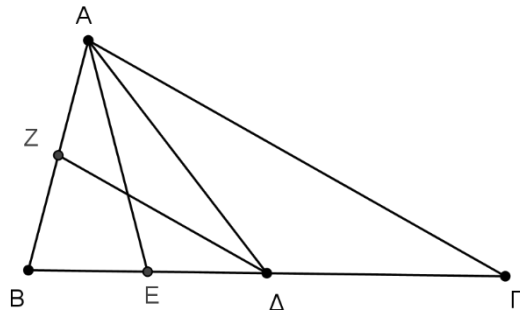


ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος $B\Delta$. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AG , η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Z .



α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το τμήμα DZ είναι παράλληλο προς την πλευρά AG και το Δ είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Επομένως, το Z θα είναι μέσο της πλευράς AB .

Τα τρίγωνα ABE και ΔBZ έχουν:

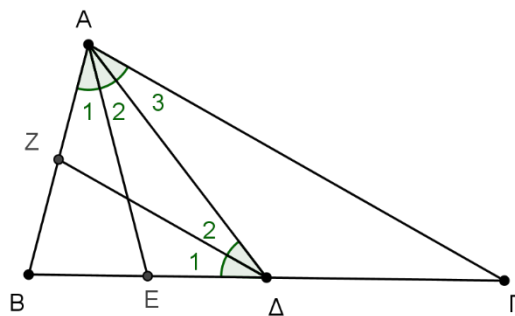
$AB = B\Delta$, ως μισά του $B\Gamma$, αφού $B\Gamma = 2AB$ (υπόθεση) και $B\Gamma = 2B\Delta$ (το Δ είναι μέσο του $B\Gamma$).

$BE = BZ$, ως μισά των ίσων τμημάτων $B\Delta$ και AB αντίστοιχα.

\hat{B} κοινή γωνία.

Επομένως, τα τρίγωνα ABE και ΔBZ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β)



Από την ισότητα των τριγώνων ABE και $BZ\Delta$ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές BE και BZ αντίστοιχα.

Το τρίγωνο BAD είναι ισοσκελές με $AB = B\Delta$, οπότε $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ (2), ως προσκείμενες στη βάση AD .

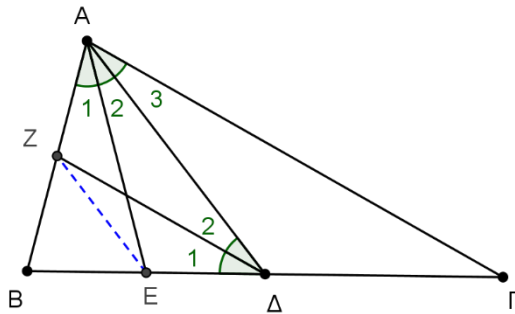
Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$B\hat{A}\Delta - \hat{A}_1 = B\hat{\Delta}A - \hat{\Delta}_1 \text{ ή } \hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \text{ (3).}$$

Επίσης, $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_3$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων DZ και AG τεμνόμενων από την AD .

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_3$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΑΓ.

γ)



Φέρνουμε το τμήμα ΖΕ, το οποίο ενώνει τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΒΔ και ΒΑ αντίστοιχα του τριγώνου ΒΑΕ, οπότε θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του ΑΔ. Στο τετράπλευρο ΑΔΕΖ οι πλευρές του ΑΖ, ΔΕ δεν είναι παράλληλες καθώς οι προεκτάσεις τους προς τα σημεία Ζ, Ε αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο Β. Άρα το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές ΑΔ, ΖΕ.

Είναι $\widehat{B\Delta D} = \widehat{B\Delta A}$ από σχέση (2), άρα το τραπέζιο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές γιατί έχει τις γωνίες τις προσκείμενες στη βάση του ΑΔ ίσες.