ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = -3,\ \gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ \dfrac{3-5}{2} = -1 \end{cases}.$$

β)

i. Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \overset{\beta \neq 0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0,$$

το οποίο ισχύει από την υπόθεση.

ii. Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι οι $x_1 = 4$ και $x_2 = -1$. Επίσης, στο ερώτημα (βi) δείξαμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). Οπότε, πρέπει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \ \text{ ή } \ \frac{\alpha}{\beta} = -1.$$

Επειδή οι α, β είναι ομόσημοι, η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ απορρίπτεται. Άρα, ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta,$$

δηλαδή, ο α είναι τετραπλάσιος του β.