ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^{2}-x+(λ-λ^{2})$ έχει $α=1, β=-1, γ=λ-λ^{2}$ και διακρίνουσα

$$Δ=β^{2}-4αγ=\left(-1\right)^{2}-4⋅1⋅\left(λ-λ^{2}\right)=$$

$ =1-4λ+4λ^{2}=\left(1-2λ\right)^{2}\geq 0 , $για κάθε $λ\in R$.

Επειδή $Δ\geq 0$, για κάθε $λ\in R$ , η εξίσωση $x^{2}-x+λ-λ^{2} $= 0 έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$Δ>0⇔\left(1-2λ\right)^{2}>0⇔$$

$$⇔1-2λ\ne 0⇔λ\ne \frac{1}{2}.$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x\_{1,2}=\frac{-\left(-1\right)\pm \sqrt{\left(1-2λ\right)^{2}}}{2}=\frac{1\pm \left(1-2λ\right)}{2}=\left\{\begin{array}{c}\frac{1+1-2λ}{2}=1-λ\\\frac{1-1+2λ}{2}=λ\end{array}\right.$$

Έχουμε ότι:

$$0<d\left(x\_{1},x\_{2}\right)<2⇔$$

$$0<\left|x\_{1}-x\_{2}\right|<2⇔$$

$$0<\left|1-λ-λ\right|<2⇔$$

$$0<\left|1-2λ\right|<2⇔$$

Δηλαδή,

$$0<\left|1-2λ\right|⇔$$

$$1-2λ\ne 0⇔$$

$$2λ\ne \frac{1}{2}⇔$$

$$λ\ne \frac{1}{2}$$

και

$$\left|1-2λ\right|<2⇔$$

$$-2<1-2λ<2⇔$$

$$-3<-2λ<1⇔$$

$$-\frac{1}{2}<λ<\frac{3}{2} .$$

Οπότε, τελικά

$$λ\in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)∪\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).$$