ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$
$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0.$$

Επειδή $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ)

i. Η σχέση $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2$ ισοδύναμα γράφεται

$$\left(x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} \ \text{ και } \ \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2\right) \Leftrightarrow$$
$$(2x_1 < x_1 + x_2 \ \text{ και } \ x_1 + x_2 < 2x_2) \Leftrightarrow$$
$$x_1 < x_2,$$

που ισχύει από υπόθεση.

ii. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		$\frac{x_1+x_2}{2}$		x_2		x_2+1		$+\infty$
$x^2 - x + \lambda - \lambda^2$		$+$	0		$-$		0		$+$		

Είναι:

$$f(x_2) = 0, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0 \ \text{ και } \ f(x_2 + 1) > 0.$$

Άρα:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)\ .$$