

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\ &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Επειδή $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

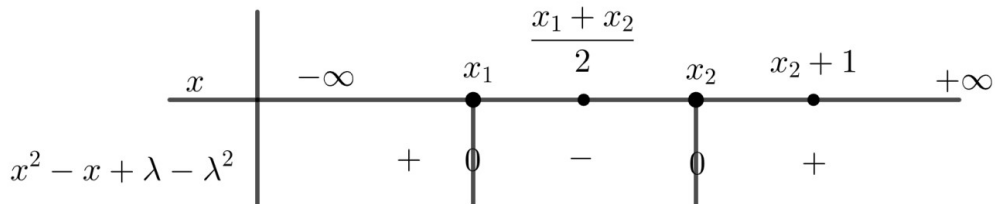
γ)

i. Η σχέση $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\left(x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} \text{ και } \frac{x_1+x_2}{2} < x_2\right) &\Leftrightarrow \\ (2x_1 < x_1+x_2 \text{ και } x_1+x_2 < 2x_2) &\Leftrightarrow \\ x_1 < x_2,\end{aligned}$$

που ισχύει από υπόθεση.

ii. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:



Είναι:

$$f(x_2) = 0, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0 \text{ και } f(x_2+1) > 0.$$

Άρα:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2+1).$$