ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\lambda = (2 \cdot (-5) + 5)^2 - 8 \cdot (-5) =$$
$$= (-10 + 5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 =$$
$$= 25 + 40 = 65.$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και έχουμε:

$$20 = (2x + 5)^2 - 8x$$

ή ισοδύναμα

$$20 = 4x^2 + 20x + 25 - 8x$$

και τελικά

$$4x^2 + 12x + 5 = 0.$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \dfrac{-12+8}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-12-8}{6} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

γ)

i. Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0 \qquad (2)$$

ii. Για να μπορεί ο εξαγόμενος αριθμός λ να είναι 5, με βάση τη σχέση (2) θα πρέπει να υπάρχει x τέτοιος ώστε:

$$4x^2 + 12x + (25 - 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 + 3x + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 < 0$. Άρα, η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Οπότε, για καμία τιμή του x δεν μπορεί ο εξαγόμενος αριθμός λ να είναι 5.

iii. Οι δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο αριθμός λ, είναι αυτές για τις οποίες η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$ όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 + 12x + (25 - \lambda)$. Οπότε, ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\varDelta \geq 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16.$$