

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρώντας το σχήμα, διαπιστώνουμε ότι τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι κατ'εκτίμηση τα $A(1,1)$ και $B(4,2)$.

β) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Οι τετμημένες των σημείων τομής τους προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x)$$

δηλαδή της:

$$|x - 2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (1)$$

Για $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ είναι $|x - 2| = x - 2$ και η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} x - 2 &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x - x = 6 + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4 > 2 \text{ δεκτή.} \end{aligned}$$

Για $x = 4$ είναι $f(4) = |4 - 2| = 2$.

Άρα, το σημείο τομής είναι το $B(4,2)$.

Για $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ είναι $|x - 2| = 2 - x$ και η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} 2 - x &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6 - 3x = x + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3x - x = 2 - 6 \Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1 < 2 \text{ δεκτή.} \end{aligned}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1 - 2| = |-1| = 1$.

Άρα, το σημείο τομής είναι το $A(1,1)$.

γ) Από το διάγραμμα που δίνεται διαπιστώνουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g αν και μόνο αν $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

δ) Η παράσταση K ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} 3|2 - x| - (x + 2) &\geq 0 \Leftrightarrow 3|2 - x| \geq x + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x - 2| \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) \geq g(x). \end{aligned}$$

Επομένως αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία $f(x) > g(x)$, δηλαδή αυτά στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g , καθώς και τα σημεία στα οποία $f(x) = g(x)$, δηλαδή τις τετμημένες των σημείων τομής τους. Από τα ερωτήματα β) και γ) βρίσκουμε ότι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty).$$