ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = 2\lambda - 1$, $\gamma = \lambda - 1$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) = \\ &= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Άρα, η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή, ανεξάρτητη του λ.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-(2\lambda - 1) \pm \sqrt{1}}{2\lambda} = \frac{1 - 2\lambda \pm 1}{2\lambda} = \begin{cases} \dfrac{2 - 2\lambda}{2\lambda} = \dfrac{1 - \lambda}{\lambda} \\ \dfrac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \end{cases}.$$

γ) Η απόσταση των ριζών x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι $|x_2 - x_1| = \left|-1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\right|$. Οπότε πρέπει:

$\left|-1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\right| = 2$ ή ισοδύναμα

$\left|\frac{-\lambda-1+\lambda}{\lambda}\right| = 2$ δηλαδή

$\left|\frac{1}{\lambda}\right| = 2$ που σημαίνει ότι

$\frac{1}{\lambda} = 2$ ή $\frac{1}{\lambda} = -2$ και τελικά

$\lambda = \frac{1}{2}$ ή $\lambda = -\frac{1}{2}$.