ΛΥΣΗ

α) Για $\alpha = 1$ ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται: $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών τους παραστάσεων είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \ \text{ ή } \ x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \ \text{ ή } \ x = 1$$

Επίσης, $g(0) = 0 + 1 = 1$ και $g(1) = 1 + 1 = 2$.

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $A\big(0, g(0)\big)$ και $B\big(1, g(1)\big)$ δηλαδή τα $A(0,1)$ και $B(1,2)$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha$$

έχει δύο άνισες λύσεις (που θα είναι οι τετμημένες x_1, x_2 των σημείων αυτών).

Δηλαδή αν και μόνο αν η εξίσωση

$$x^2 - x + 1 - \alpha = 0 \qquad (1)$$

έχει δύο άνισες ρίζες.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x + 1 - \alpha$ είναι

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - \alpha) =$$
$$= 1 - 4 + 4\alpha = 4\alpha - 3.$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4a - 3 > 0 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha > 3 \Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$$

γ) Επειδή $\alpha > 1 > \frac{3}{4}$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, τις x_1, x_2. Το γινόμενό τους είναι:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - \alpha.$$

Αλλά, $\alpha > 1 \Rightarrow 1 - \alpha < 0$, δηλαδή $P < 0$. Οπότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ετερόσημες.