ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$ έχει ρίζες x_1 και x_2 με άθροισμα $S=x_1+x_2=-\dfrac{-2}{1}=2$ και γινόμενο $P=x_1x_2=\dfrac{\lambda(2-\lambda)}{1}=\lambda(2-\lambda)$.

i. Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι: $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\cdot 2=4$.

ii. Το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ είναι:

$\mathrm{E}=x_1x_2=\lambda(2-\lambda)$, $\lambda\in(0,2)$.

β) Έχουμε

$\mathrm{E}\le 1 \Leftrightarrow$
$\lambda(2-\lambda)\le 1 \Leftrightarrow$
$\lambda^2-2\lambda+1\ge 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda-1)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

γ) Το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1, αν και μόνο αν

$\mathrm{E}=1 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$
$(\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow$
$\lambda=1$.

Για $\lambda=1$, η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 4 και το εμβαδόν του 1, οπότε το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο πλευράς $x_1=x_2=1$.