

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$. Εφόσον x και y είναι πλευρές τριγώνου, πρέπει:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10, \text{ δηλαδή } x \in (0, 10).$$

Οπότε το εμβαδόν του $AB\Gamma$ τριγώνου είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma, \text{ δηλαδή}$$

$$E(x) = \frac{1}{2} x(10 - x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \text{ με πεδίο ορισμού το διάστημα } (0, 10).$$

β) Έχουμε:

$$E(x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(-x^2 + 10x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow,$$

$$-x^2 + 10x - 25 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 5)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει για κάθε } x \in (0, 10).$$

γ) Το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο αν και μόνο αν:

$$E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$(x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 5.$$

Για $x = 5$, είναι και $y = 10 - x = 10 - 5 = 5$, οπότε $AB = A\Gamma = 5$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.