

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου με διαστάσεις α και β είναι $E = \alpha \cdot \beta$ (1).

Οι αριθμοί α, E, β , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $E^2 = \alpha \cdot \beta$, οπότε λόγω (1),

$$E^2 = E, \text{ δηλαδή}$$

$$E^2 - E = 0, \text{ οπότε}$$

$$E(E-1) = 0 \text{ και επειδή } E \neq 0,$$

$$E = 1.$$

β)

i. Το άθροισμα των ριζών της ζητούμενης εξίσωσης είναι $S = \alpha + \beta = 10$ και το γινόμενο των ριζών είναι $P = \alpha\beta = E = 1$. Άρα μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες α και β είναι η $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0$.

ii. Το τριώνυμο $x^2 - 10x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96 > 0$, οπότε η εξίσωση $x^2 - 10x + 1 = 0$ έχει δύο ρίζες διαφορετικές, τις:

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{96}}{2} = \frac{10 - \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6} > 0.$$

$$x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{96}}{2} = \frac{10 + \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6} > 0.$$

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $\alpha = 5 - 2\sqrt{6}$ και $\beta = 5 + 2\sqrt{6}$.