ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2x = 8 + 2$, δηλαδή $2x = 10$ και τελικά $x = 5$. Η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = 5 - 2 = 3$.

β) Οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $x^2 = 2 \cdot 8$, δηλαδή $x^2 = 16$ και τελικά $x = \pm 4$.

Για $x = -4$, ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \dfrac{-4}{2} = -2$, ενώ για $x = 4$ ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \dfrac{4}{2} = 2$.

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \ldots$ και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \ldots$, τότε:

i. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$, είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot \left(2 \cdot 2 + (\nu - 1) \cdot 3\right) = \frac{\nu}{2} \cdot (1 + 3\nu) = \frac{\nu + 3\nu^2}{2}.$$

ii. Ο 7$^{\text{ος}}$ όρος της γεωμετρικής προόδου (β_ν) με 1$^{\text{ο}}$ όρο $\beta_1 = 2$ και λόγο $\lambda = 2$ είναι $\beta_7 = 2 \cdot 2^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$. Έχουμε ισοδύναμα:

$2 \cdot (S_\nu + 24) = \beta_7$, δηλαδή

$2 \cdot \left(\dfrac{\nu + 3\nu^2}{2} + 24 \right) = 128$, οπότε

$3\nu^2 + \nu - 80 = 0$.

Το τριώνυμο $3\nu^2 + \nu - 80$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 961 > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες διαφορετικές, τις:

$\nu_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 - 31}{6} = -\dfrac{16}{3}$, που απορρίπτεται γιατί $\nu \in \mathbb{N}$.

$\nu_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 + 31}{6} = 5$.

Τελικά $\nu = 5$.