ΛΥΣΗ

α) Oι αριθμοί $2,x,8$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2x=8+2$, δηλαδή $2x=10$ και τελικά $x=5$. H διαφορά $ω$ της προόδου είναι $ω=5-2=3$.

β) Οι αριθμοί $2,x,8$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $x^{2}=2⋅8$, δηλαδή $x^{2}=16$ και τελικά $x=\pm 4$ .

Για $x=-4$, ο λόγος της προόδου είναι $λ=\frac{-4}{2}=-2$, ενώ για $x=4$ ο λόγος της προόδου είναι $λ=\frac{4}{2}=2$.

γ) Αν $\left(α\_{ν}\right)$ είναι η αριθμητική πρόοδος $2,5,8,11,...$ και $\left(β\_{ν}\right)$ η γεωμετρική πρόοδος $2,4,8,16,...$, τότε:

i. Το άθροισμα  των $ν$ πρώτων όρων της $\left(α\_{ν}\right)$ με $α\_{1}=2$ και $ω=3$, είναι $S\_{ν}=\frac{ν}{2}⋅\left(2⋅2+\left(ν-1\right)⋅3\right)=\frac{ν}{2}⋅\left(1+3ν\right)=\frac{ν+3ν^{2}}{2}$.

ii. Ο 7ος όρος της γεωμετρικής προόδου $\left(β\_{ν}\right)$ με 1ο όρο $β\_{1}=2$ και λόγο $λ=2$ είναι$β\_{7}=2⋅2^{7-1}=2⋅2^{6}=2^{7}=128$. Έχουμε ισοδύναμα:

$2⋅\left(S\_{ν}+24\right)=β\_{7}$, δηλαδή

$2⋅\left(\frac{ν+3ν^{2}}{2}+24\right)=128$, οπότε

$3ν^{2}+ν-80=0$.

Το τριώνυμο $3ν^{2}+ν-80$ έχει διακρίνουσα $Δ=1^{2}-4⋅3⋅\left(-80\right)=961>0$, οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες διαφορετικές, τις:

$ν\_{1}=\frac{-1-\sqrt{961}}{2⋅3}=\frac{-1-31}{6}=-\frac{16}{3}$, που απορρίπτεται γιατί $ν\in N$.

$ν\_{2}=\frac{-1+\sqrt{961}}{2⋅3}=\frac{-1+31}{6}=5$.

Τελικά $ν=5$.