ΛΥΣΗ

α)

Από υπόθεση έχουμε: $F'(x) = f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι ρίζες της f είναι οι $x = 0,\ x = \frac{1}{2}, x = 1$ και το πρόσημό της δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της F.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

β) Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η καμπύλη C_3 παρουσιάζει την μονοτονία και τα ακρότατα της F, σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών του ερωτήματος (α), επομένως η C_3 είναι η γραφική παράσταση της F και η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f'.

γ) Η παράγωγος f' της f έχει τύπο $f'(x) = 12x^2 - 12x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για την F έχουμε: $F'(x) = f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = (x^4 - 2x^3 + x^2)'$ επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση C_3 της F επομένως $F(0)=1 \Rightarrow c=1$.

Τελικά $F(x)=x^4-2x^3+x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 0, $\frac{1}{2}$ και 1. Από τον πίνακα προσήμου της f έχουμε:

$f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,\frac{1}{2}]$ και $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\frac{1}{2},1]$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[F(x)\right]_{\frac{1}{2}}^1=F(\frac{1}{2})-F(0)-F(1)+F(\frac{1}{2})=$$

$$2F(\frac{1}{2})-F(0)-F(1)=2(\frac{1}{16}-\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+1)-1-1=\frac{1}{8}$$