Λύση

α)

i. Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x)=(1-2\ln x)'=-\frac{2}{x}<0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$.

Από α)i. έχουμε $f \searrow$ για $x>0$, οπότε $x<e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x)>f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow f(x)>0$ και $x>e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x)<f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow f(x)<0$.

β)

i. Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η συνάρτηση g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $g'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{f(x)}{x^3}$.

Από το α)ii., αφού $x^3>0$, έχουμε $x<e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x)>0$ και $x>e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x)<0$.

Οπότε για την συνεχή συνάρτηση g συμπληρώνουμε τον πίνακα

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
g'		$+$		$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα η τιμή $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2e}$ είναι η μέγιστη της συνάρτησης g.

ii. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\cdot\ln x=+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \underset{DLP}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 .$$

Επομένως και λόγω του β)i ερωτήματος το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα

$\left(-\infty, \frac{1}{2e}\right)$.