Λύση

α)

i. Για $x \in (1,+\infty)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

και παραγωγίσιμη, με $f'(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -1\frac{(\ln x)'}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x\ln^2 x} < 0$.

ii. Είναι $f\left((1,+\infty)\right) \overset{f\searrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right)$. Όμως

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{\ln x} \overset{\ln x=u}{=} \lim\limits_{u\to0^+} \frac{1}{u} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \overset{\ln x=u}{=} \lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{u} = 0$, άρα

$f\left((1,+\infty)\right) = (0,+\infty)$.

β)

i. Από α) ερώτημα έχουμε για $x \in (1,+\infty)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$, δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, άρα αντιστρέφεται.

ii. Είναι $f^{-1}: (0,+\infty) \to (1,+\infty)$.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x, με $x > 1$. Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{y}}$$

Επομένως $f^{-1}(y) = e^{\frac{1}{y}}$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x > 1$.