Λύση

α) Είναι $D_f = \mathbb{R}$ με f συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

i. Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \overset{e^x \nearrow}{\Rightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2} \overset{e^x > 0}{\Rightarrow} \frac{1}{e^{2x_1}} > \frac{1}{e^{2x_2}} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow .$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{2x}} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ και $e^{2x} > 0$ κοντά στο $-\infty$,

και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$. Οπότε, λόγω του α)i, παίρνουμε $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

β) Από το α)i ερώτημα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, άρα $1-1$. Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $1-1$ σε ένα το πολύ σημείο. Από το α)ii. ερώτημα η τιμή 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της f που είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση είναι $1-1$.