ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(x) \geq \frac{1}{x}$, για x κοντά στο 0 από δεξιά και $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Οπότε είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

β)

i. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) = \left(f(x) \cdot \ln(x+1)\right)' &= f'(x) \cdot \ln(x+1) + f(x)\left(\ln(x+1)\right)' \\ &= f'(x) \cdot \ln(x+1) + f(x) \cdot \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)f'(x) \cdot \ln(x+1) + f(x)}{x+1} \\ &= \frac{-f(x) + f(x)}{x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

ii. Από το προηγούμενο υποερώτημα προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά c ώστε $g(x) = c,\ x > 0$. Άρα $f(x) \cdot \ln(x+1) = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot \frac{1}{\ln(x+1)}$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$. είναι:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq c \cdot \frac{1}{\ln(x+1)} \leq 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} \leq g(x) \leq \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Ακόμη έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\ln(x+1)\right)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \ln(0+1) + 1 = 1.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} c = 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Οπότε $g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)},\ x > 0$.

Σχόλιο: Στο ερώτημα (β ii) για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$ μπορούμε να δουλέψουμε και ως εξής:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)-\ln(0+1)}{x-0}=\left.\frac{d\left(\ln(x+1)\right)}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{0+1}=1\,.$$