

#### ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

(Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον ισχύει  $(x+1)f'(x) \cdot \ln(x+1) = -f(x)$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) \cdot \ln(x+1)$ ,  $x > 0$  είναι σταθερή.

(Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει  $\frac{\ln(x+1)}{x} \leq g(x) \leq \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x}$

και έπειτα να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

(Μονάδες 10)