ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}dt=5\int_0^2\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}dt=5\left[\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]_0^2=5\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^0\right]=-\frac{9}{5}.$$

β) Ο όγκος της βενζίνης (σε λίτρα) που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου είναι ίσος με $g(2)$ ενώ αρχικά είναι $g(0)=5$.

Α τρόπος

Είναι

$$\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}dt=-\frac{9}{5}\Leftrightarrow\int_0^2 g'(t)dt=-\frac{9}{5}\Leftrightarrow g(2)-g(0)=-\frac{9}{5}\Leftrightarrow g(2)-5=-\frac{9}{5}\Leftrightarrow g(2)=\frac{16}{5}.$$

Β τρόπος

Για κάθε $t>0$ έχουμε: $g'(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}\Rightarrow g'(t)=\left(5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\right)'$.

Οι συναρτήσεις $g(t)$ και $f(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$ είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $g'(t)=f'(t)$ για κάθε $t\in(0,+\infty)$, άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $t\in[0,+\infty)$ να ισχύει $g(t)=f(t)+c\Rightarrow g(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t+c$.

Είναι $g(0)=5\Rightarrow 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^0+c=5\Rightarrow c=0$ οπότε $g(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t\in[0,+\infty)$, άρα $g(2)=\frac{16}{5}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\right)=5\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^t=5\cdot 0=0$ άρα καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

Σχόλιο: Στην πράξη μετά από 40 εβδομάδες ο όγκος της βενζίνης του δοχείου είναι ίσος με $g(40)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{40}<0,001$ που σημαίνει ότι το δοχείο δεν περιέχει ούτε καν 1 ml. Δηλαδή στην πράξη μετά από 40 εβδομάδες μπορούμε να πούμε ότι η βενζίνη έχει εξατμιστεί.