

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2+1} - x \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ άρα η

ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Για τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f επιλύουμε

την εξίσωση $f(x) = x$. Έτσι, έχουμε: $x - \frac{x-1}{x^2+1} = x \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Άρα η ασύμπτωτη $\varepsilon: y = x$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $(1, f(1))$, δηλαδή στο $(1, 1)$.

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f(1) = 1$. Ακόμη είναι $f(0) = 0 - \frac{0-1}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1$. Επειδή

ισχύει ότι: $0 \neq 1$ και $f(1) = f(0)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1-1".