ΛΥΣΗ

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Για x κοντά στο 0 θέτουμε $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=h(x)$, με $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$.

Είναι $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=h(x)\Rightarrow f(x)=\eta\mu x\cdot h(x)$.

Άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot h(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x)\cdot\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0\cdot 0=0$.

β τρόπος

Είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x)=0\cdot 0=0$.

β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση h του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot h(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot h(x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0} h(x)=1\cdot 0=0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

β τρόπος

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0\cdot 1=0$, άρα $f'(0)=0$.

γ) $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(0,g(0))$ είναι η $y-g(0)=g'(0)(x-0)$. Έχουμε $g(0)=f(0)\cdot\eta\mu 0=0$ και επειδή οι συναρτήσεις f, φ (με $\varphi(x)=\eta\mu x$) είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ προκύπτει ότι και η $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

   Έτσι έχουμε $g'(0)=f'(0)\cdot\eta\mu 0+f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0=0$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης γίνεται $y-0=0x\Leftrightarrow y=0$.

   β τρόπος (για τον υπολογισμό της παραγώγου της g στο $x_0 = 0$) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1\cdot 0=0$ άρα $g'(0)=0$.

ii. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή. Τότε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $x_0 = 0$ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους $(0,0)$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot \eta\mu x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x_0 = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η ισότητα ισχύει και για $x = \pi$ και έτσι έπεται το ζητούμενο.