ΛΥΣΗ

α) Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x\_{0}= 0$ ισχύει $f\left(0\right)=\lim\_{x\to 0}f\left(x\right)$.

Για $x$ κοντά στο $0$ θέτουμε $\frac{f\left(x\right)}{ημx}=h\left(x\right)$, με $\lim\_{x\to 0}h\left(x\right)=0$.

Είναι $\frac{f\left(x\right)}{ημx}=h\left(x\right)⇒f\left(x\right)=ημx⋅h\left(x\right)$.

Άρα $f\left(0\right)=\lim\_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 0}\left(ημx⋅h\left(x\right)\right)=\lim\_{x\to 0}\left(ημx\right)⋅\lim\_{x\to 0}h\left(x\right)=0⋅0=0$.

**β τρόπος**

Είναι $f\left(0\right)=\lim\_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 0}\left(\frac{f\left(x\right)}{ημx}⋅ημx\right)=\lim\_{x\to 0}\left(\frac{f\left(x\right)}{ημx}\right)⋅\lim\_{x\to 0}\left(ημx\right)=0⋅0=0$.

β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $h$του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$\lim\_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim\_{x\to 0}\frac{ημx⋅h\left(x\right)}{x}=\lim\_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}⋅h\left(x\right)\right)=\lim\_{x\to 0}\frac{ημx}{x}⋅\lim\_{x\to 0}h\left(x\right)=1⋅0=0.$$

Άρα η είναι παραγωγίσιμη στο $x\_{0}=0$ με $f^{'}\left(0\right)=0$.

**β τρόπος**

$\lim\_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim\_{x\to 0}\left(\frac{f\left(x\right)}{ημx}⋅\frac{ημx}{x}\right)=\lim\_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{ημx}⋅\lim\_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=0⋅1=0$, άρα $f^{'}\left(0\right)=0$.

γ) $g\left(x\right)=f\left(x\right)⋅ημx$, $x\in R$.

1. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g$ στο σημείο $\left(0,g\left(0\right)\right)$ είναι η $y-g\left(0\right)=g^{'}\left(0\right)\left(x-0\right)$. Έχουμε $g\left(0\right)=f\left(0\right)⋅ημ0=0$ και επειδή οι συναρτήσεις $f$, $φ$ (με $φ\left(x\right)=ημx$) είναι παραγωγίσιμες στο $x\_{0}= 0$ προκύπτει ότι και η $g\left(x\right)=f\left(x\right)⋅ημx$ είναι παραγωγίσιμη στο $x\_{0}= 0$.

Έτσι έχουμε $g^{'}\left(0\right)=f^{'}\left(0\right)⋅ημ0+f\left(0\right)⋅συν0=0$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης γίνεται $y-0=0x⇔y=0$.

**β τρόπος** (για τον υπολογισμό της παραγώγου της $g$ στο $x\_{0}= 0$) Είναι $\lim\_{x\to 0}\frac{g\left(x\right)-g\left(0\right)}{x-0}=\lim\_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)⋅ημx}{x}=\lim\_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}⋅f\left(x\right)\right)=\lim\_{x\to 0}\frac{ημx}{x}⋅\lim\_{x\to 0}f\left(x\right)=1⋅0=0$άρα $g^{'}\left(0\right)=0$.

1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g$ είναι κυρτή. Τότε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g$ στο $x\_{0}= 0$ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους $\left(0,0\right)$. Άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει $g\left(x\right)\geq 0⇔f\left(x\right)⋅ημx\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x\_{0}= 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η ισότητα ισχύει και για $x=π$ και έτσι έπεται το ζητούμενο.