ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $2x-3\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{3}{2}$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι

$\mathrm{A}_f=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο στον αριθμητή του τύπου της συνάρτησης f. Έχουμε:

$$4x^2-2\left(\alpha+3\right)x+3\alpha=4x^2-2\alpha x-6x+3a=2x\left(2x-a\right)-3\left(2x-a\right)=\left(2x-a\right)\left(2x-3\right).$$

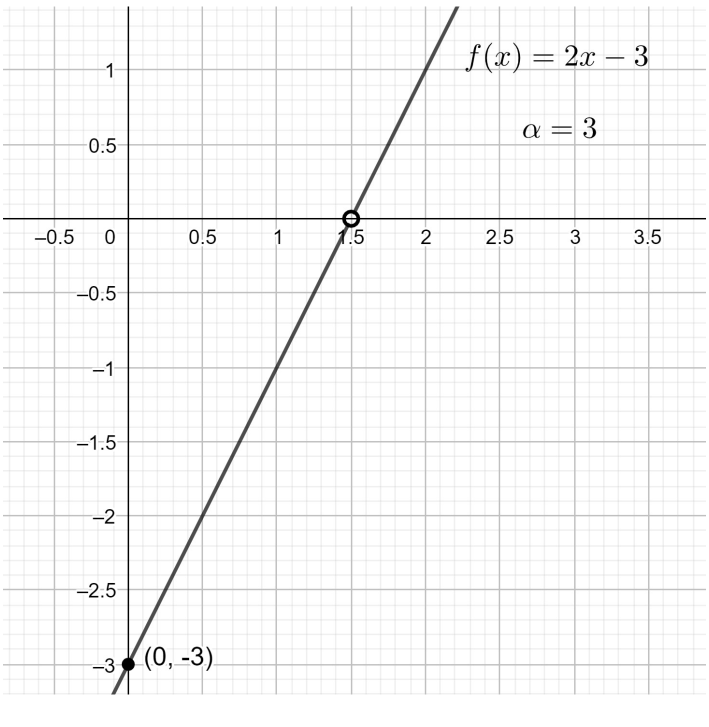
Άρα:

$$f(x)=\frac{4x^2-2\left(\alpha+3\right)x+3\alpha}{2x-3}=\frac{\left(2x-\alpha\right)\left(2x-3\right)}{2x-3}=2x-\alpha \text{, για κάθε } x\neq\frac{3}{2}.$$

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\left(1,-1\right)$, δηλαδή $f(1)=-1$,οπότε $2\cdot 1-\alpha=-1$ και τελικά $\alpha=3$.

δ) Η γραφική παράσταση της $f\left(x\right)=2x-\alpha$ είναι ευθεία, εκτός του σημείου με τετμημένη $\dfrac{3}{2}$, δηλαδή του σημείου $\left(\dfrac{3}{2},3-\alpha\right)$.

Αν $\alpha=3$, η ευθεία δεν έχει σημείο τομής με τον $x'x$ άξονα (το σημείο $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ δεν είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f). Τέμνει τον $y'y$ άξονα στο $\left(0,-3\right)$, γιατί $f\left(0\right)=2\cdot 0-\alpha=-\alpha=-3$.



Αν $\alpha \neq 3$:

Για $y=0$ έχουμε $0=2x-\alpha \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha}{2}$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$.

Για $x=0$, έχουμε $y=2\cdot 0-\alpha=-\alpha$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον τον $y'y$ άξονα στο $\mathrm{B}(0,-\alpha)$.

Ειδικά στην περίπτωση που $\alpha=0$, τα παραπάνω σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(0,0)$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.