ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2+x-6 έχει διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=25>0$. Το άθροισμα των ριζών του είναι $S=\frac{-1}{1}=-1$ και το γινόμενό τους είναι $P=\frac{-6}{1}=-6$, οπότε οι ρίζες είναι $x_1=-3$ και $x_2=2$. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε η ανίσωση $x^2+x-6<0$ αληθεύει για $x\in(-3,2)$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$, δηλαδή

$x-\frac{1}{2}<-1$ ή $x-\frac{1}{2}>1$ και τελικά

$x<-\frac{1}{2}$ ή $x>\frac{3}{2}$.

γ)

i. Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$, οπότε από το β) ερώτημα $\alpha<-\frac{1}{2}$ (απορρίπτονται οι τιμές αυτές γιατί $\alpha>0$, ως πλευρά) ή $\alpha>\frac{3}{2}$ (1).

Για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $\mathrm{E}<6\Leftrightarrow\alpha\cdot(\alpha+1)<6\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha-6<0$. Από το α) ερώτημα και επειδή $\alpha>0$, η ανίσωση αληθεύει για $\alpha\in(0,2)$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2\alpha+2(\alpha+1)=4\alpha+2$.

Έχουμε $\frac{3}{2}<\alpha<2\overset{(\cdot4)}{\Leftrightarrow}6<4\alpha<8\overset{(+2)}{\Leftrightarrow}8<\Pi<10$. Άρα η περίμετρος του ορθογωνίου κυμαίνεται μεταξύ των αριθμών 8 και 10.