ΛΥΣΗ

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha_3 = 4\\ \alpha_5 = 16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 \cdot \lambda^2 = 4\\ \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 16\end{cases} \overset{(\div)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda^2 = 4\\ \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 4\end{cases} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda = 2\\ \alpha_1 \cdot 2^2 = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 2\\ \alpha_1 = 1\end{cases}$$

β) Έχουμε

$\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{\dfrac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\dfrac{1}{\alpha_\nu}} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}} = \dfrac{1}{\lambda}$, οπότε (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} = 1$ και λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν), δηλαδή $\lambda' = \dfrac{1}{2}$

γ) Εφόσον S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν), έχουμε:

$$S_{10} = \alpha_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1.$$

Το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) είναι:

$$S'_{10} = \beta_1 \frac{(\lambda')^{10} - 1}{\lambda' - 1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1 - 2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot (2^{10} - 1)}{2^{10}} = \frac{1}{2^9} S_{10}.$$