ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $x^2+1\geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0$. Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=9>0$ και ρίζες

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2 .$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

β) Επειδή $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$, οι αριθμοί $\lambda-1$ και $\kappa-1$ είναι ετερόσημοι.

i. Αν $\begin{cases}\lambda-1>0\\ \text{και}\\ \kappa-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda>1\\ \text{και}\\ \kappa<1\end{cases}$, τότε $\kappa<1<\lambda$.

Αν $\begin{cases}\lambda-1<0\\ \text{και}\\ \kappa-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda<1\\ \text{και}\\ \kappa>1\end{cases}$, τότε $\lambda<1<\kappa$.

Σε κάθε περίπτωση, το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ,λ.

ii. Οι αριθμοί κ,λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και το 1 είναι μεταξύ τους.

Άρα $\begin{cases}\kappa\leq\frac{1}{2}\\ \text{και}\\ \lambda\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa\leq\frac{1}{2}\\ \text{και}\\ -\lambda\leq -2\end{cases}$, οπότε $\kappa-\lambda\leq\frac{1}{2}-2 \Leftrightarrow \kappa-\lambda\leq -\frac{3}{2}$ ή

$$\begin{cases} \lambda \le \dfrac{1}{2} \\ \text{και} \\ \kappa \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda \ge -\dfrac{1}{2} \\ \text{και} \\ \kappa \ge 2 \end{cases}$$

, οπότε $\kappa - \lambda \ge 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa - \lambda \ge \frac{3}{2}$.

Τελικά $|\kappa - \lambda| \ge \frac{3}{2}$.