

ΛΥΣΗ

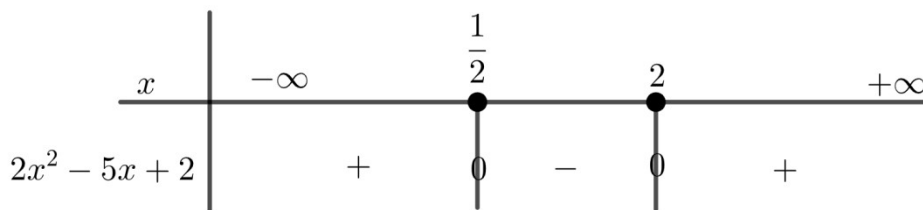
α) Έχουμε $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$. Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0 \text{ και ρίζες}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα



Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$.

β) Επειδή $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$, οι αριθμοί $\lambda - 1$ και $\kappa - 1$ είναι ετερόσημοι.

$$\text{i. Αν } \begin{cases} \lambda - 1 > 0 \\ \text{και} \\ \kappa - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 1 \\ \text{και} \\ \kappa < 1 \end{cases}, \text{ τότε } \kappa < 1 < \lambda.$$

$$\text{Αν } \begin{cases} \lambda - 1 < 0 \\ \text{και} \\ \kappa - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 1 \\ \text{και} \\ \kappa > 1 \end{cases}, \text{ τότε } \lambda < 1 < \kappa.$$

Σε κάθε περίπτωση, το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ, λ .

ii. Οι αριθμοί κ, λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και το 1 είναι μεταξύ τους.

$$\text{Άρα } \begin{cases} \kappa \leq \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \lambda \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa \leq \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ -\lambda \leq -2 \end{cases}, \text{ οπότε } \kappa - \lambda \leq \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \leq -\frac{3}{2} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \kappa \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda \geq -\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \kappa \geq 2 \end{cases}, \text{ οπότε } \kappa - \lambda \geq 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa - \lambda \geq \frac{3}{2}.$$

Τελικά $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.