ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 14x + 8$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$, οπότε η εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, τις

$x_1 = \dfrac{-(-14) + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \dfrac{14+10}{6} = 4$ και

$x_2 = \dfrac{-(-14) - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \dfrac{14-10}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Το τριώνυμο $8x^2 - 14x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$, οπότε η εξίσωση $8x^2 - 14x + 3 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, τις

$x_1 = \dfrac{-(-14) + \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \dfrac{14+10}{16} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$ και

$x_2 = \dfrac{-(-14) - \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \dfrac{14-10}{16} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει: $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.   (5)

i. Εάν $\rho = 0$, τότε από την σχέση (5) προκύπτει $\gamma = 0$, άτοπο, αφού $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Άρα $\rho \neq 0$.

ii. Ο $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4) αν και μόνο αν $\gamma\left(\dfrac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \cdot \dfrac{1}{\rho} + \alpha = 0 \overset{(\cdot\rho^2)}{\Leftrightarrow} \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0$, που ισχύει λόγω της σχέσης (5).