

ΛΥΣΗ

α) Για τη διαφορά ω της προόδου ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa + 1)^2 - \kappa^2 = \\ &= \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 = 2\kappa + 1. \quad (1)\end{aligned}$$

Άρα, η διαφορά ω είναι περιττός αριθμός.

β)

i. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0.\end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}.$$

Η τιμή $\kappa = -1$ απορρίπτεται γιατί $\kappa > 1$. Άρα, $\kappa = 3$. Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\omega = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

ii. Για να είναι ο 72 όρος της προόδου, πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 72 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 72 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + (n-1)7 = 72 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + 7n - 7 = 72 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7n = 77 \Leftrightarrow n = 11.\end{aligned}$$

Άρα, ο αριθμός 72 είναι ο 11^{ος} όρος της προόδου.