ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2+2x+3-\alpha=0 \quad (1)$$

και έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(3-\alpha)=$$
$$=4-12+4\alpha=4\alpha-8.$$

i. Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha-8>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha>8 \Leftrightarrow \alpha>2.$$

ii. Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=2.$$

Για $\alpha=2$ η διπλή ρίζα είναι η $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-2}{2}=-1.$

β)

i. Είναι

$$f(x)\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3\geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Από το ερώτημα β)i. έχουμε ότι $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow f(x)-2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$\sqrt{f(x)-2}\leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)-2}\right)^2\leq 2^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-2\leq 4 \Leftrightarrow f(x)\leq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+3\leq 6 \Leftrightarrow$$
$$x^2+2x-3\leq 0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ \dfrac{-2-4}{3} = -3 \end{cases}.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3,1].$$