ΛΥΣΗ

α) Θέτοντας στην εξίσωση $x^4 - 8x - 9 = 0$ όπου $x^2 = u \geq 0$, γίνεται:

$$u^2 - 8u - 9 = 0.$$

Το τριώνυμο έχει $\alpha = 1$, $\beta = -8$, $\gamma = -9$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 64 + 39 = 100 > 0.$$

Οι ρίζες του είναι οι:

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2} = \begin{cases} \dfrac{8+10}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 > 0 \text{ δεκτή} \\ \dfrac{8-10}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 < 0 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

Όμως έχουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$.

β) Όπως και στο ερώτημα α), η εξίσωση $x^4 - \beta x^2 + \gamma = 0$, αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ με $u \geq 0$, ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, με:

$$\beta^2 \geq 0 \text{ και}$$

$$\gamma < 0 \text{ οπότε } -\gamma > 0.$$

Συνεπώς, $\Delta > 0$ ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Επειδή $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες u_1, u_2. Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma < 0$. Άρα, οι ρίζες είναι μη μηδενικές και ετερόσημες. Έστω $\begin{cases} u_1 < 0, \text{απορρίπτεται} \\ u_2 > 0 \quad \text{δεκτή} \end{cases}$.

Τότε έχουμε:

$$x^2 = u_2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{u_2}.$$