

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$.

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)