ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν $f(x) > 0$, οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$(x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > 4 \Leftrightarrow |x-1| > 2.$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν:

$$x - 1 < -2 \text{ ή } x - 1 > 2,$$

από όπου ισοδύναμα βρίσκουμε ότι:

$$x < -1 \text{ ή } x > 3.$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 > 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $|x-1| \geq 0$ και $2 > 0$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $g$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2$$

η οποία γράφεται

$$|x-1|^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$|x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0.$$

Στην τελευταία σχέση θέτουμε $|x-1| = y$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$y^2 - y - 6 = 0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{2} = 3 \\ \dfrac{1-5}{2} = -2 \end{cases}.$$

Άρα για $y = |x-1|$ έχουμε:

- $|x-1| = 3 \Leftrightarrow (x - 1 = 3 \text{ ή } x - 1 = -3) \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2,$
- $|x-1| = -2$ που είναι αδύνατη.

Θέτοντας $x = 4$ στον τύπο της συνάρτησης $g$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(4) &= |4 - 1| + 2 \\ &= |3| + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = -2$ στον τύπο της συνάρτησης $g$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(-2) &= |-2 - 1| + 2 \\ &= |-3| + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Άρα, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $g$ είναι τα

$$A(-2,5) \ \text{ και } \ B(4,5).$$