ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 3) =$$
$$= 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda.$$

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \lambda < 12$$

γ)

i. Το άθροισμα των ριζών του τριωνύμου είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6$$

και το γινόμενο των ριζών του είναι:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 3}{1} = \lambda - 3.$$

Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \lambda < 12.$$

Επίσης, οι ρίζες είναι ομόσημες και θετικές αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} P > 0 \\ \text{και} \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 3 > 0 \\ \text{και} \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda > 3.$$

Άρα, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες και θετικές ρίζες αν και μόνο αν

$$\{\lambda < 12 \text{ και } \lambda > 3) \Leftrightarrow 3 < \lambda < 12.$$

ii. Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$, το τριώνυμο είναι θετικό για τιμές του x εκτός των ριζών x_1, x_2 και αρνητικό εντός των ριζών.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 6x + \lambda - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επειδή $x_1 < \mu < x_2$ είναι $\mu > 0$ *αφού* $x_1 > 0$ και από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\mu) < 0.$$

Επίσης, αφού $\kappa < 0$ και $0 < x_1$ είναι $\kappa < x_1$. Άρα, από τον πίνακα προσήμων διαπιστώνουμε ότι

$$f(\kappa) > 0.$$

Τελικά είναι $\kappa < 0, \mu > 0$, $f(\kappa) > 0$ και $f(\mu) < 0$. Οπότε,

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0.$$