ΛΥΣΗ

α) Έστω $\mathrm{K}(\mathrm{x_K}, \mathrm{y_K})$ το κέντρο του κύκλου.

Αφού το Κ είναι σημείο της ευθείας ε: y= 2x – 1 , ισχύει $y_K = 2x_K - 1$. Άρα Κ$(x_K, 2x_K - 1)$.

Ο κύκλος c εφάπτεται της ευθείας ζ: x + y – 2 = 0 άρα ισχύει $\mathrm{d}(\mathrm{K},\zeta) = \rho$.

Έχουμε:

$$\mathrm{d}(\mathrm{K},\zeta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\mathrm{x_K} + 2\mathrm{x_K} - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |3\mathrm{x_K} - 3| = 6$$

$$\Leftrightarrow 3x_K - 3 = 6 \text{ ή } 3x_K - 3 = -6 \Leftrightarrow x_K = 3 \text{ ή } x_K = -1\ .$$

Αφού το Κ είναι σημείο του πρώτου τεταρτημορίου είναι $\mathrm{x_K} > 0$ οπότε $\mathrm{x_K} = 3$. Επομένως το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,5) και η εξίσωση του κύκλου είναι :

$$\text{c: } (x-3)^2 + (y-5)^2 = 18.$$

β)

i. Η ευθεία ΚΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ζ του κύκλου c στο Α, άρα ισχύει:

$$\lambda_{\mathrm{KA}}\lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{KA}} = 1.$$

Επομένως η ευθεία (ΚΑ) έχει εξίσωση :

$$y - y_{\mathrm{K}} = \lambda_{\mathrm{KA}}(x - x_{\mathrm{K}}\ ) \Leftrightarrow y - 5 = 1(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{x} - \mathrm{y} + 2 = 0$$

ii. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ευθείας ζ με την ευθεία ΚΑ. Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ζ και ΚΑ.

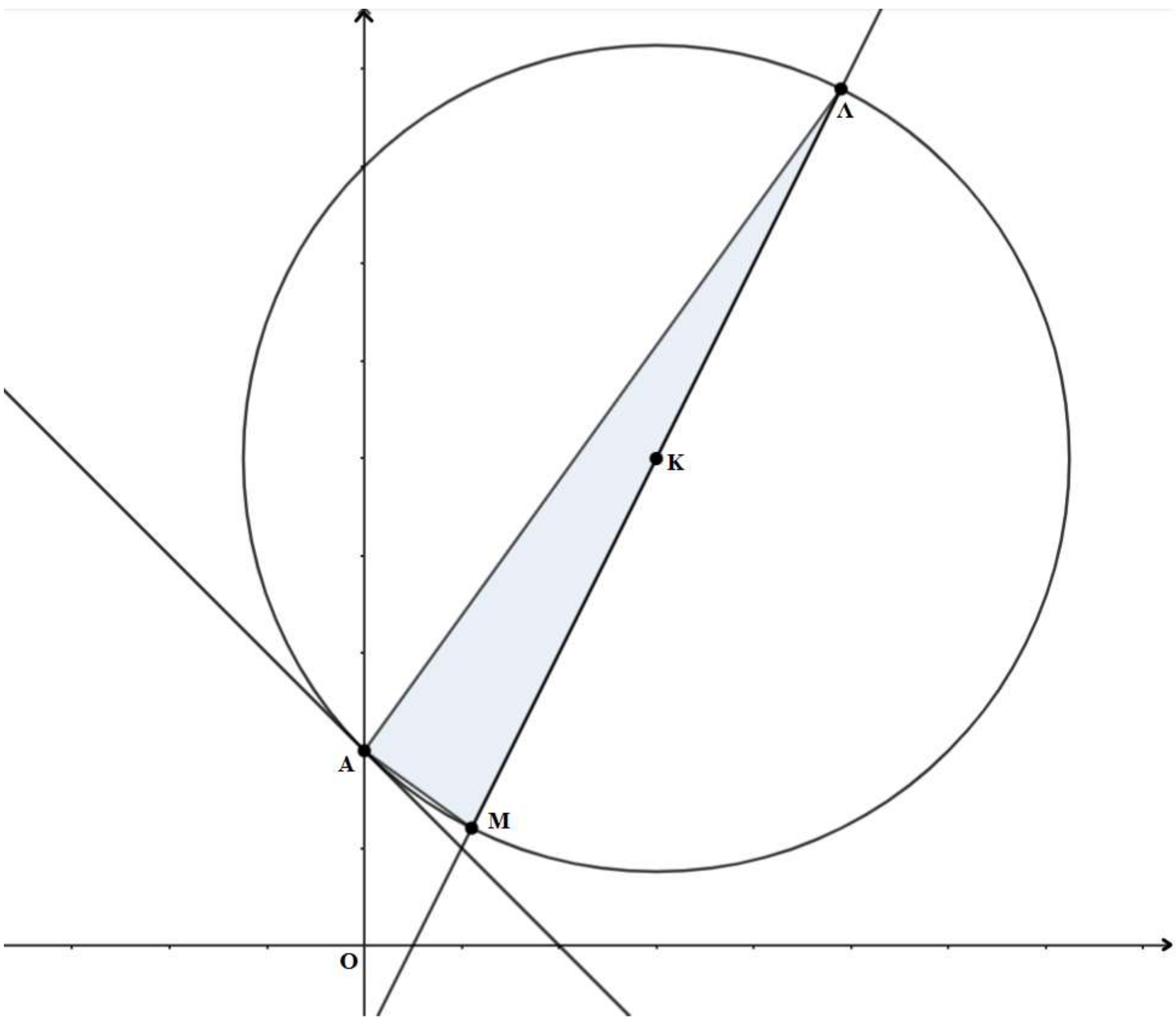
$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ άρα το Α έχει συντεταγμένες (0,2).

γ) Η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ, Λ που είναι αντιδιαμετρικά. Επομένως ΜΛ=2ρ. Το ύψος του τριγώνου ΑΛΜ προς την ΛΜ είναι ίσο με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

Είναι ε: $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} - \mathrm{y} - 1 = 0$, άρα $\upsilon = d(A,\varepsilon) = \frac{|0-2-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Οπότε:

$$(\mathrm{A\Lambda M}) = \frac{\mathrm{M\Lambda}\cdot\upsilon}{2} = \frac{2\rho\cdot\upsilon}{2} = 3\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}\ .$$


Λ
K
A
M
O