ΛΥΣΗ

α) i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{D}_f=(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=2\frac{\ln x}{x}$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f,

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
- παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=0$.

ii. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=2\frac{x\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=2\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Το πρόσημο της $f''(x)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f,

- είναι κυρτή στο διάστημα $(0,e]$ και κοίλη στο $[e,+\infty)$
- παρουσιάζει καμπή για $x=e$. Το σημείο καμπής είναι το $M(e,1)$.

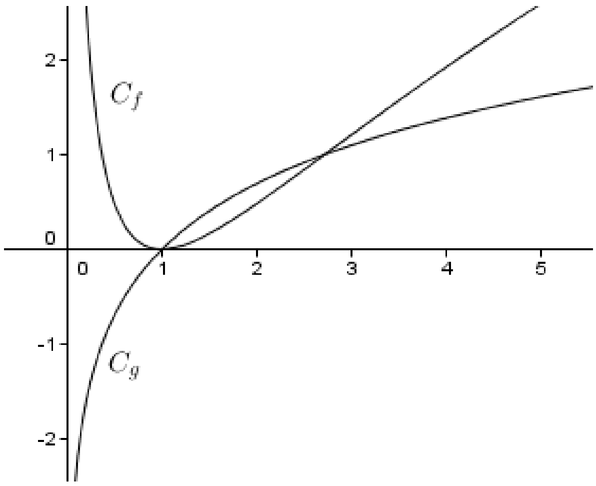
β) Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln^2 x=\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\frac{2}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln^2 x)=+\infty,\text{ δηλαδή }\lim_{x\to+\infty}f(x)\notin\mathbb{R}$$

οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$, ενώ δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Η γραφική παράσταση της f στο ίδιο σύστημα με εκείνη της g φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



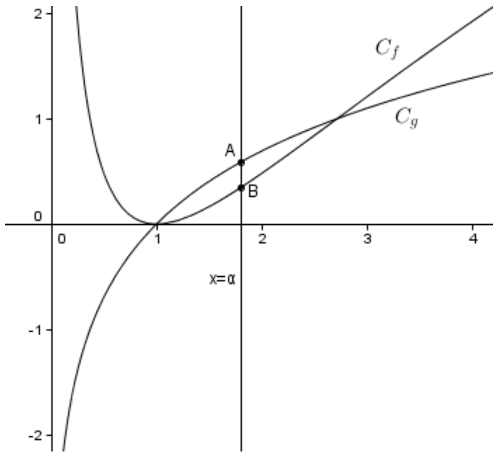
γ) i. Είναι:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln^2 x-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x(\ln x-1)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=e$$

Επομένως τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα $(1, 0)$ και $(e, 1)$.

ii. Στο διάστημα $[1, e]$ ισχύει $g(x)\ge f(x)$, οπότε το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι

$$(AB)=\ln\alpha-\ln^2\alpha$$



Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(\alpha)=\ln\alpha-\ln^2\alpha,\ \alpha\in(1, e)$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$d'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}-2\ln\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}(1-2\ln\alpha)$$

και ισχύει

$$d'(\alpha)\ge 0\Leftrightarrow 1-2\ln\alpha\ge 0\Leftrightarrow \ln\alpha\le\frac{1}{2}\overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow} 1<\alpha\le\sqrt{e}$$

οπότε η d είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(1, \sqrt{e}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(\sqrt{e}, e\right)$. Επομένως η συνάρτηση d παίρνει την μέγιστη τιμή της, δηλαδή το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο, όταν $\alpha=\sqrt{e}$.