ΛΥΣΗ

α)i. Ισχύει:

$$f(x)+2x=f'(x)+x^2 \Leftrightarrow f'(x)-2x=f(x)-x^2,\ (1)$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-2x$, οπότε λόγω της (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g'(x)=g(x)$.

ii. Από το ερώτημα (α_i) συμπεραίνουμε ότι $g(x)=c\cdot e^x$, $c\in\mathbb{R}$.

Επίσης $g(0)=f(0)+0=1$, οπότε $c\cdot e^0=1\Leftrightarrow c=1$.

Έχουμε λοιπόν, $e^x=f(x)-x^2$, οπότε $f(x)=e^x+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(-1,0)$ ώστε $f'(x_o)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+2x$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,0]$. Επιπλέον, $f'(-1)=\frac{1}{e}-2<0$ και $f'(0)=1>0$, οπότε $f'(-1)<0<f'(0)$.

Επομένως, απ' το Θ. Ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_o\in(-1,0)$ ώστε $f'(x_o)=0$, που είναι το ζητούμενο. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x)=e^x+2$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα x_o είναι μοναδική.

ii. Από τη μονοτονία της f' συμπεραίνουμε ότι:

- Για κάθε $x<x_o$ ισχύει $f'(x)<f'(x_o)$ δηλαδή $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_o]$
- Για κάθε $x>x_o$ ισχύει $f'(x)>f'(x_o)$ δηλαδή $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_o,+\infty)$

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o. Η ελάχιστη τιμή m της f είναι

$$m=f(x_o)=e^{x_o}+x_o^2$$

Επιπλέον, $-1<x_o<0\Rightarrow 0<x_o^2<1$ και $-1<x_o<0\Rightarrow e^{-1}<e^{x_o}<1$, οπότε

$$e^{-1}<x_o^2+e^{x_o}<2\Rightarrow e^{-1}<m<2.$$